

带电粒子动态圆对称性

□陈克超

近年高考频繁出现动态圆问题,即带电粒子进入磁场时入射速度大小或方向不断变化的问题,是带电粒子在有界磁场中运动的难点。本文以粒子入射速度大小不变,方向时刻变化类问题为例,说明动态圆的定态分析。

基本模型

在磁场中向垂直于磁场的各个方向发射粒子时,粒子入射速度的大小不变,由 $Bqv_0 = m\frac{v_0^2}{r}$ 知,粒子在磁场中运动的轨道半径 r 不变,粒子的运动轨迹是围绕入射点旋转的动态圆,其轨迹圆的圆心在入射点为圆心,轨道半径 r 为半径的圆周上。

动态圆的难点是轨迹不确定,利用典型的确定情形寻找对应的轨迹圆是关键。必须注意圆周运动中的对称规律,并按找圆心,画轨迹,再利用几何关系求半径的基本思路进行。最值对应于边界端点与相切,轨迹圆弧不变,运动时间最长对应圆心角最大与圆的直径。

1. 对称性

例1 在 xOy 平面内有许多电子(质量为 m , 电荷量为 e),从坐标原点 O 不断以相同的速度 v_0 沿不同方向射入第一象限,如图1所示。现加一个垂直于 xOy 平面向里,磁感应强度为 B 的匀强磁场,要求这些电子穿过磁场后都能平行于 x 轴正方向运动,求符合条

件磁场的最小面积。

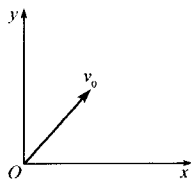


图1

解析: 设由带电粒子发射装置射入第 I 象限的带电微粒的初速度方向与 x 轴夹角 θ , 则 θ 满足 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 由于带电微粒最终将沿 x 轴正方向运动,故 B 应垂直于 xOy 平面向外,带电微粒在磁场内做半径为 $R = \frac{mv_0}{qB}$ 匀速圆周运动。

由于带电微粒的入射方向不同,若磁场充满纸面,它们所对应的运动的轨迹如图2所示。

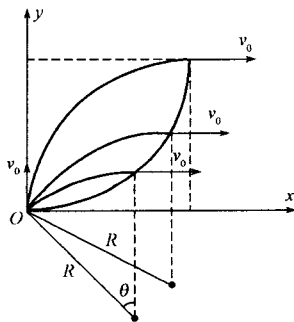


图2



为使这些带电微粒经磁场偏转后沿 x 轴正方向运动。由图可知,它们必须从经 O 点作圆运动的各圆的最高点飞离磁场。这样磁场边界上 P 点的坐标 $P(x, y)$ 应满足方程:

$$x = R \sin \theta, y = R(1 - \cos \theta),$$

所以磁场边界的方程为: $x^2 + (y - R)^2 = R^2$, 由题中 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 的条件可知,以 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 的角度射入磁场区域的微粒的运动轨迹 $(x - R)^2 + y^2 = R^2$, 即为所求磁场的另一侧的边界。

因此,符合题目要求的最小磁场的范围应是圆 $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ 与圆 $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ 的交集部分。

由几何关系,可以求得符合条件的磁场的最小面积为: $S_{\min} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{m^2 v_0^2}{q^2 B^2}$ 。

点拨: 本题根据对称性确定粒子运动轨迹圆的边界,化解难点。

2. 定轨迹

例 2 如图 3 所示,平面直角坐标系 xOy 内,在 $x \leq 0$ 的区域内分布着匀强电场,其等势线如图中虚线所示(相邻等势面间的距离相等)。在 A 点源源不断地产生速率为零、质量为 m 、电荷量为 $+q$ 的粒子,经电场加速后从 O 点进入一个圆形的匀强磁场区,其磁感应强度为 B ,方向垂直纸面向里,其半径为 R ,直径 OB 在 x 轴上。在 $x = 4R$ 处有一个垂直 x 轴很大的光屏,与 x 轴的交点为 C ,粒子打在光屏上可出现亮点。设粒子的重力不计。 A 点所在的等势面电势为零, D 点的电势为 $\frac{B^2 R^2 q}{2m}$ 。

(1) 求从 A 点产生的粒子经电场和磁场后,打在光屏上的位置。

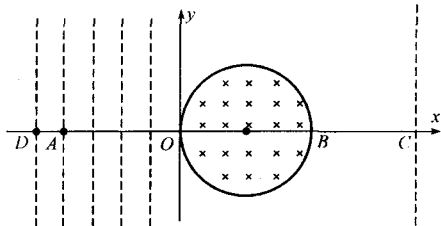


图 3

(2) 若将圆形磁场区以 O 点为轴,整体逆时针将 OB 缓慢转过 90° (与 y 轴重合),求此过程中粒子打在光屏上的点距 C 点的最远距离。

解析: (1) 粒子经过电场加速后,设进入磁场的速度为 v_0 ,运动轨迹如图 4 所示,

$$\text{有 } \frac{B^2 R^2 q}{2m} \times 4 \times q = \frac{1}{2} m v_0^2, \text{ 得: } v_0 = \frac{2BRq}{m}$$

粒子在磁场中做圆周运动,设半径为 r ,

$$Bq v_0 = m \frac{v_0^2}{r}, \text{ 得: } r = 2R$$

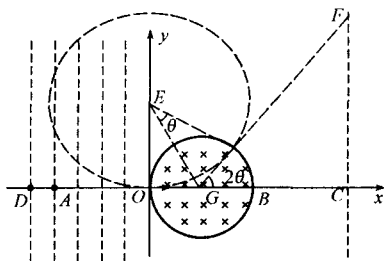


图 4

设粒子运动的圆心为点 E , 圆心角为 2θ ;

$$\tan \theta = \frac{R}{r} = \frac{1}{2};$$

$$\angle CGF = 2\theta, FC = (4R - R) \tan 2\theta - 3R \times$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 4R;$$

故 F 点坐标为 $(4R, 4R)$ 。

(2) 当圆形磁场整体转动时,粒子做圆周运动的圆心和轨迹都不变。

见图 5,当磁场区将粒子的轨迹覆盖最长

