

有界磁场最小面积全攻略

高爱虎

(德州市第一中学 山东 德州 253017)

带电粒子在磁场中的运动问题,既是高中物理的重点,也是学生学习的难点,同时又是高考的热点.而这类问题中求解有界磁场最小面积的题目更是近年来高考及各类试卷的“新宠儿”.

求解有界磁场的最小面积的题目主要考查了学生对平面几何知识与物理知识的综合运用能力,它能够很好的体现高考对学生“分析综合能力、应用数学处理物理问题的能力”的考查.其难点在于粒子做部分圆周运动的圆心、半径、射入磁场点、射出磁场点的确定.下面按磁场区域的形状分类解析.

1 磁场区域为矩形

例 1 如图 1 所示,在直角坐标系 xOy 第一象限的区域内存在沿 y 轴正方向的匀强电场.现有一质量为 m ,电量为 e 的电子从第一象限的某点 $A(L, \frac{\sqrt{3}}{8}L)$ 以初速度 v_0 沿 x 轴的负方向开始运动,经过

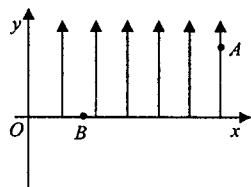


图1

x 轴上的点 $B(\frac{L}{4}, 0)$ 进入第四象限,先做匀速直线运动然后进入垂直纸面向里的矩形匀强磁场区域,电子偏转后恰好经过坐标原点 O ,并沿 y 轴的正方向运动,不计电子的重力.求:(1) 电子经过 B 点的速度 v ; (2) 该匀强磁场的磁感应强度 B 的大小和矩形磁场的最小面积 S .

解析 (1) 由题意可知电子仅在电场力作用下由 A 点运动到 B 点将做类平抛运动,

$$\text{水平方向: } x_{AB} = \frac{3}{4}L = v_0 t,$$

$$\text{竖直方向: } y = \frac{\sqrt{3}}{8}L = \frac{v_y}{2}t,$$

$$\text{解得 } v_y = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0,$$

所以电子经过 b 点时的速度为

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}v_0,$$

设 B 点的速度 v 与 $-x$ 方向的夹角为 θ ,可知

$$\sin\theta = \frac{v_y}{v} = \frac{1}{2},$$

所以 $\theta = 30^\circ$.

(2) 如图 2,电子以与 $-x$ 成 30° 角进入第四象限后先沿 BC 做匀速直线运动,然后进入匀强磁场区域做匀速圆周运动恰好沿 y 轴向上的速度经过 O 点.可知圆周运动的圆心 O' 一定在 x 轴上,且 O' 点到 O 点的距离与到直线 BC 上 C 点(C 点即为磁场的边界点)的垂直距离相等,找出 O' 点,画出其运动的部分轨迹为弧 CDO ,由此就可以确定磁场区域的边界了,如图 2 中虚线所示.

设圆周运动半径为 R ,由洛伦兹力提供粒子在磁场中作

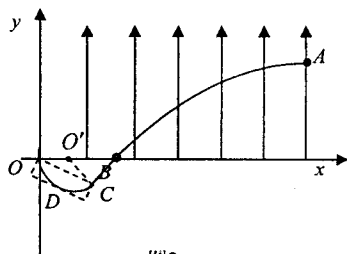


图2

匀速圆周运动的向心力,可得

$$evB = m \frac{v^2}{R},$$

由图 2 知

$$OB = \frac{1}{4}L = 3R,$$

解得

$$B = \frac{8\sqrt{3}mv_0}{eL}.$$

$$\text{矩形磁场的长度 } L_{\text{长}} = 2R\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{12}L,$$

$$\text{宽度 } L_{\text{宽}} = R - R\sin\theta = \frac{1}{24}L.$$

矩形磁场的最小面积为

$$S = L_{\text{长}} \cdot L_{\text{宽}} = \frac{\sqrt{3}}{288}L^2.$$

小结 求解该类问题时,应依据题意确定圆心的位置、圆的半径、射入磁场点、射出磁场点,从而画出粒子在磁场中运动的部分圆弧;让矩形的一边与射入、射出磁场点的连线重合,另一边(运动轨迹小于半圆周)或三边(运动轨迹大于半圆周)与圆弧相切,据此画出能恰好覆盖运动轨迹的矩形即是最小.

2 磁场区域为圆形

例 2 如图 3 所示,纸平面内一带电粒子从 A 点开始做直线运动,一段时间后进入一垂直于纸面向里的圆形匀强磁场区域(图中未画出).飞出磁场后从上板边缘平行于板面进入两个平行的金属板间,两金属板带等量异号电荷,粒子在两板间经

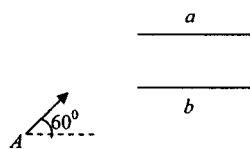


图3

偏转后恰从下板边缘飞出.已知带电粒子的荷质比为 $\frac{q}{m} = 2.0 \times 10^6 \text{ C/kg}$,其重力不计,粒子进入磁场前的速度方向与带电板成 $\theta = 60^\circ$ 角,匀强磁场的磁感应强度为 $B = 0.5 \text{ T}$,带电板长 $l = 20 \text{ cm}$,板距为 $d = 10 \text{ cm}$,板间电压为 $U = 100 \text{ V}$.不考虑粒子间的相互作用,试回答:(1) 上金属板 a 带什么电?说明理由.(2) 圆形匀强磁场区域的最小面积为多大?

解析 (1) 带电粒子穿过磁场后,速度变为水平向右,由左手定则知,带电粒子带负电.由粒子射入电场后从下板右边缘飞出知,粒子所受电场力向下,所以上板带负电.

(2) 粒子在电场中做类平抛运动,设粒子的初速度为 v_0 ,飞出两金属板间所需时间为 t ,则

水平方向有

$$l = v_0 t,$$

竖直方向有

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{qU}{md} t^2.$$

解得 $t = 1.0 \times 10^{-5} \text{ s}$, $v_0 = 2.0 \times 10^4 \text{ m/s}$.

设粒子在磁场中做圆周运动的半径为 R , 由牛顿第二定律有 $qv_0 B = m \frac{v_0^2}{R}$, 所以 $R = 2 \text{ cm}$.

如图 4 所示, 粒子从上板左边缘 P 平行于板面进入板间, 可知粒子在磁场中运动的圆心在 P 点正下方 2 cm 处, 设该点为 O ; 从 O 点向 A 点速度所在直线做垂线, 垂足为 Q , 则 Q 点即为粒子射入磁场的点; 以 O 点

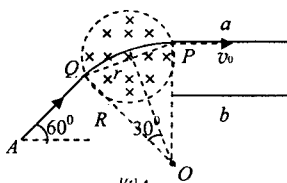


图 4

为圆心 $R = 2 \text{ cm}$ 为半径从 Q 点至 P 点逆时针做弧, 弧 QP 即为粒子在磁场中的运动轨迹; 分析可知当磁场区域圆的直径为弧 QP 所对的弦长时圆形磁场面积最小.

设磁场的最小半径为 r , 由几何关系得 $r = R \sin 30^\circ$.

故磁场最小面积为

$$S = \pi r^2 = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

小结 此类题目除了明确圆心的位置、圆的半径、射入磁场点、射出磁场点, 画出粒子在磁场中运动的部分圆弧; 还应明确当圆形磁场的直径等于粒子运动轨迹的弦长时磁场面积最小.

3 磁场区域为三角形

例 3 如图 5 所示, 在倾角为 30° 的斜面 OA 左侧有一竖直挡板, 其上有一小孔 P , 现有一质量为 $m = 4 \times 10^{-20} \text{ kg}$ 、带电量 $q = +2 \times 10^{-14} \text{ C}$ 的粒子, 从小孔以速度 $v_0 = 3 \times 10^4 \text{ m/s}$ 水平射向磁感应强度为 $B = 0.2 \text{ T}$ 、方向垂直纸面向里的一正三角形磁场区域. 该粒子在运动过程中始终不触及挡板, 且在飞出磁场后能垂直射在 OA 面上, 粒子重力不计. 求: (1) 粒子在磁场中所做圆周运动的半径; (2) 粒子在磁场中运动的时间; (3) 正三角形磁场区域的最小边长.

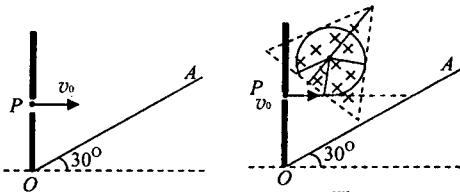


图 5

图 6

解析 (1) 由 $qvB = m \frac{v^2}{r}$, $T = \frac{2\pi r}{v}$,

得

$$r = \frac{mv}{Bq} = 0.3 \text{ m},$$

$$T = \frac{2\pi m}{Bq} = 2\pi \times 10^{-5} \text{ s} = 6.28 \times 10^{-5} \text{ s}.$$

(2) 由左手定则可知粒子进入磁场后将向上偏转, 根据题意粒子水平射入磁场、垂直斜面 OA 方向射出磁场, 可知粒子在磁场中转过的圆心角为 300° , 在斜面和挡板之间自入射速度所在直线上的某点逆时针方向做半径为 $r = 0.3 \text{ m}$ 、圆心角为 300° 的圆弧 (弧与挡板无交点), 该弧即为粒子在磁场中的运动轨迹. 如图 6 所示, 可知 $t = T = 5.23 \times 10^{-5} \text{ s}$.

(3) 依据 (2) 中画出的粒子运动轨迹, 画出正三角形, 如图中虚线所示. 设正三角形的边长为 L , 则由几何知识由

$$L \cos 30^\circ = \frac{r}{\sin \theta} + r \cos \theta,$$

得

$$L = \frac{(4 + \sqrt{3})r}{\sqrt{3}} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10} \text{ m}.$$

小结 磁场区域为三角形的题目当三角形边长最小时粒子圆周运动的轨迹并不是三角形磁场的内切圆, 因此在计算最小边长时要注意等边三角形三边的三条中垂线中只有射入、射出磁场点所在边的中垂线过轨迹圆的圆心.

4 磁场区域为树叶形

磁场区域为树叶形的题目的特征是大量相同带电粒子都过磁场中某点. 设大量质量为 m 、带电量为 q 的粒子以相同速率 v 垂直射入磁感应强度为 B 的匀强磁场中, 且均过磁场中某点 P . 则粒子将在磁场中做半径为 $r = \frac{mv}{Bq}$ 的匀速圆周运动, 且轨迹圆的圆心集合是以 P 点为圆心、 r 为半径的圆 (以下统称“圆心圆”), 如图 7 虚线所示. 下面利用“圆心圆”的知识求解树叶形磁场的最小面积.

例 4 (2009 年海南卷) 如图 8, $ABCD$ 是边长为 a 的正方形. 质量为 m 、电荷量为 e 的电子以大小为 v_0 的初速度沿纸面垂直于 BC 边射入正方形区域. 在正方形内适当区域中有匀强磁场. 电子从 BC 边上的任意点入射, 都只能从 A 点射出磁场. 不计重力, 求: (1) 此匀强磁场区域中磁感应强度的方向和大小; (2) 此匀强磁场区域的最小面积.

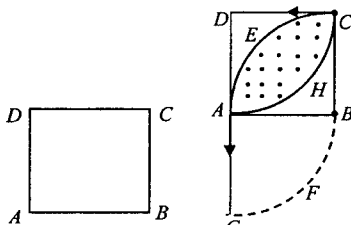


图 8

图 9

解析 (1) 设匀强磁场的磁感应强度的大小为 B . 令圆弧 AEC 是自 C 点垂直于 BC 入射的电子在磁场中的运行轨道 (如图 9 所示). 电子所受到的洛伦兹力 $f = ev_0 B$ 其方向应指向圆弧的圆心, 因而磁场的方向应垂直于纸面向外. 圆弧 AEC 的圆心在 CB 边或其延长线上, 亦在 A 、 C 连线的中垂线上, 故 B 点即为圆心, 圆半径为 a , 由牛顿第二定律有

$$ev_0 B = m \frac{v_0^2}{a},$$

所以

$$B = \frac{mv_0}{ea}.$$

(2) 由 (1) 中决定的磁感应强度的方向和大小, 可知自 C 点垂直于 BC 入射电子在 A 点沿 DA 方向射出, 且自 BC 边上其它点垂直于入射的电子的运动轨道只能在 $BAEC$ 区域中. 因而, 圆弧 AEC 是所求的最小磁场区域的一个边界.

下面求该磁场区域的另一边界, 所有电子都从 A 点射出磁场, 则所有电子运动轨迹的圆心均在以 A 点为圆心、 a 为半径的圆周上. 自 C 点入射的电子其圆心在 B 点, 所以 C 点以下射入的电子运动轨迹的圆心只能在 $\frac{1}{4}$ 圆弧 BFG 上, 如图 9 虚线所示. 因为所有电子射入方向均垂直于 BC , 因此电子进入磁场时的半径都应平行于线段 BC . 平移线段 BC 且端点 B 沿圆弧 BFG 移动, 则端点 C 的轨迹——圆弧 CHA 即为磁场区域边界的下边界. 所以磁场最小面积为

$$S = 2\left(\frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = \frac{\pi - 2}{2}a^2.$$

小结 沿“圆心圆”的部分弧平移某条半径即可找到相应的磁场区域边界, 从而求出磁场的最小面积.