

四、碰撞

完全弹性碰撞	动能守恒	动量守恒
非完全弹性碰撞	动能不守恒	动量守恒
完全非弹性碰撞	动能不守恒	动量守恒

2-4 质心、质心运动定律

一、质心的定义

质点系 N个质点

质量: $m_1 \ m_2 \ m_3 \dots \ m_i \dots \ m_N$

位矢: $\vec{r}_1 \ \vec{r}_2 \ \vec{r}_3 \dots \ \vec{r}_i \dots \ \vec{r}_N$

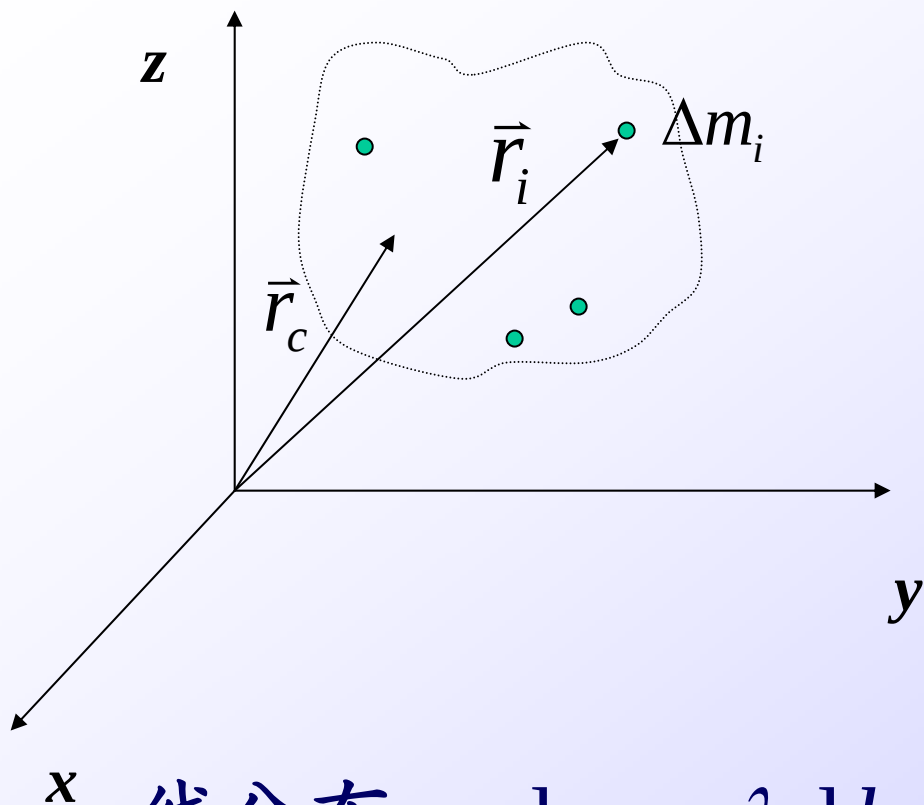
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m}$$

质量连续分布时:



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int \vec{r} dm}{m}$$

$$x_c = \frac{\int x dm}{m}$$

$$y_c = \frac{\int y dm}{m}$$

$$z_c = \frac{\int z dm}{m}$$

线分布

$$dm = \lambda dl$$

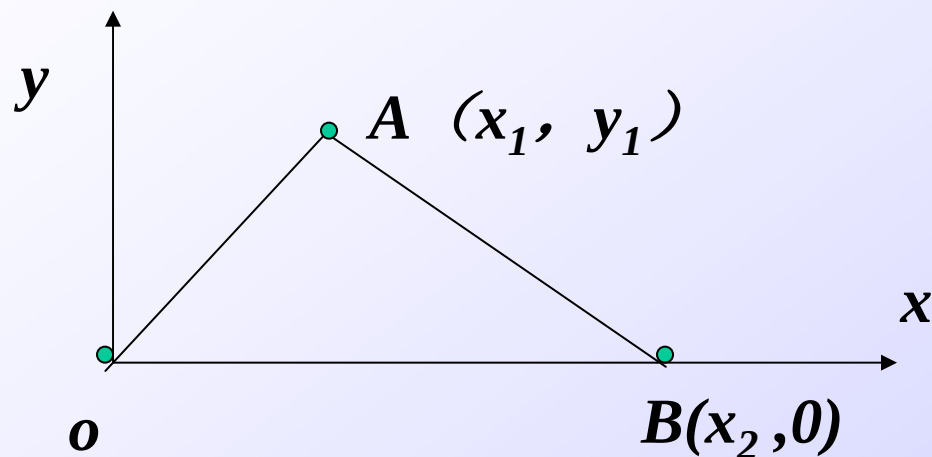
面分布

$$dm = \sigma dS$$

体分布

$$dm = \rho dV$$

例：任意三角形的每个顶点有一质量 m ，求质心。



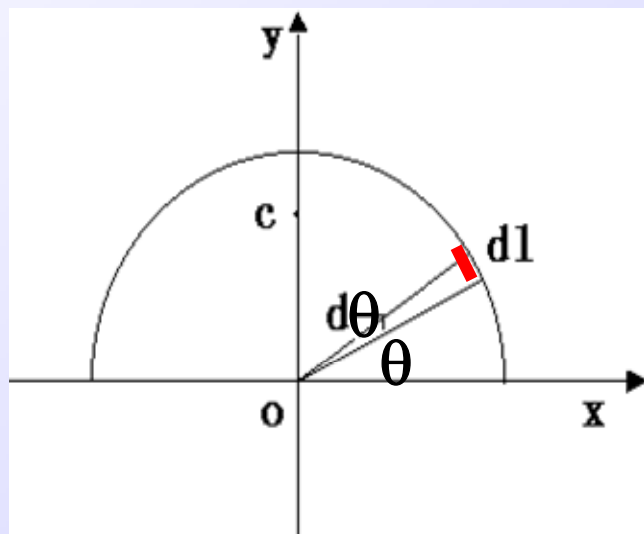
$$x_c = \frac{mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_c = \frac{my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

例：一段均匀铁丝弯成半径为 R 的半圆形，求此半圆形铁丝的质心。

解：分析得质心应在 y 轴上。

选如图坐标系，取长为 dl 的铁丝，质量为 dm ，以 λ 表示线密度， $dm=\lambda dl$ 。

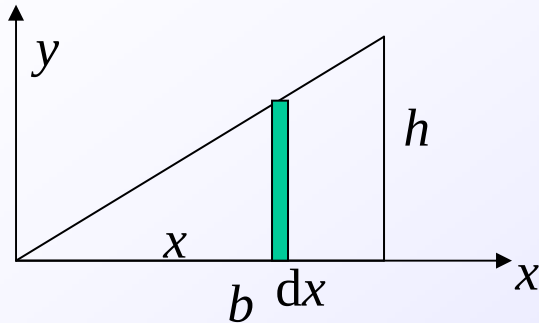


$$y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int y \lambda dl}{m} \quad x_c = 0 \quad y = R \sin \theta \quad dl = R d\theta$$

$$y_c = \frac{1}{m} \int_0^\pi R \sin \theta \lambda R d\theta = \frac{1}{m} 2 \lambda R^2$$

$$\because m = \pi R \lambda \quad \therefore y_c = \frac{2}{\pi} R$$

Example: Find the location of the center of mass, the mass m is known.



Solution :

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\frac{bh}{2}}, \quad dm = \sigma dS, \quad dS = \frac{h}{b} x dx$$

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\sigma h}{mb} \int_0^b x^2 dx = \frac{\sigma h}{mb} \frac{b^3}{3} = \frac{m}{\frac{bh}{2}} \frac{h}{mb} \frac{b^3}{3} = \frac{2}{3} b$$

$$y_{cm} = \dots = \frac{h}{3}$$

$$\text{or } dS = dx dy, \quad x_{cm} = \frac{1}{m} \iint x \sigma dx dy = \frac{\sigma}{m} \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} x dy = \frac{\sigma}{m} \int_0^b \frac{h}{b} x^2 dx = \frac{2}{3} b$$

二、质心运动定律

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{P} = m\vec{v}_c$$

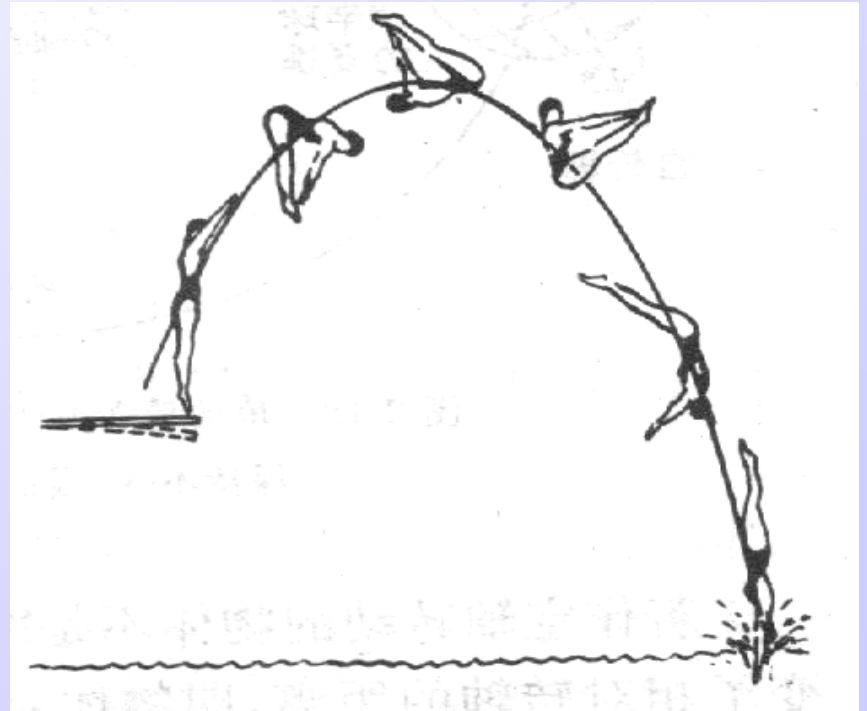
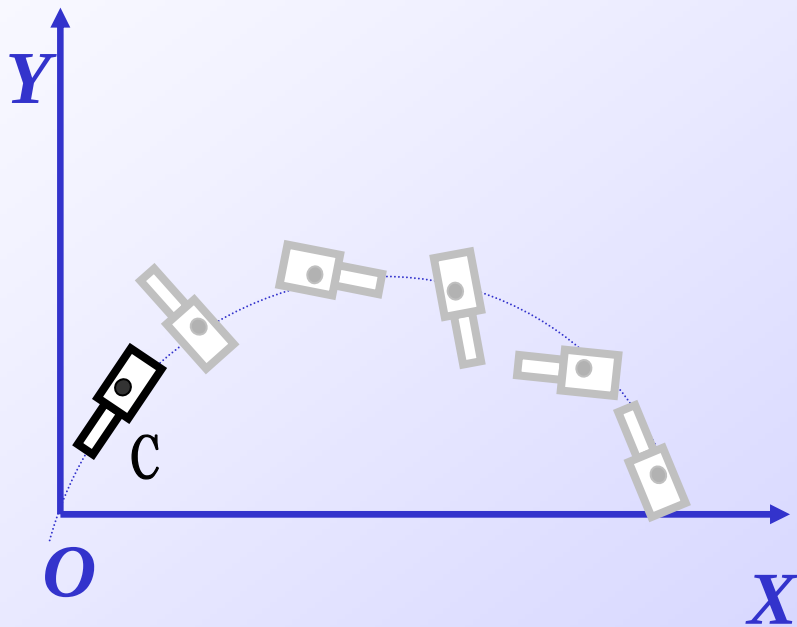
质点系的总动量等于它的总质量与它的质心的运动速度的乘积。

$$\frac{d \vec{P}}{dt} = m \frac{d \vec{v}_c}{dt} = m \vec{a}_c$$

$$\vec{F} = m \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m}$$

质心运动定律：系统的总质量和质心加速度的乘积等于质点系所受外力的矢量和。



例：

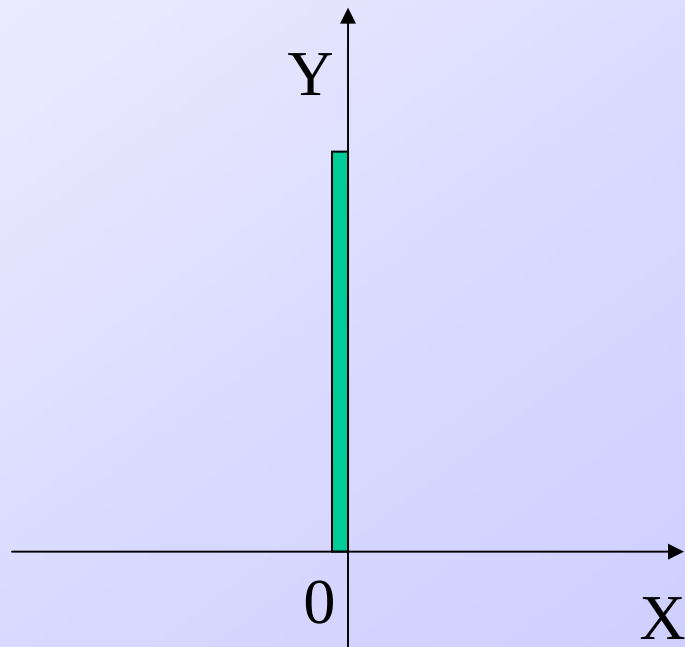
- 均质直棒 (m, l) 竖直地立在光滑的桌面上，当自然倒下时，求棒的位置。

解：

$$F_x = 0, \quad a_{cx} = 0$$

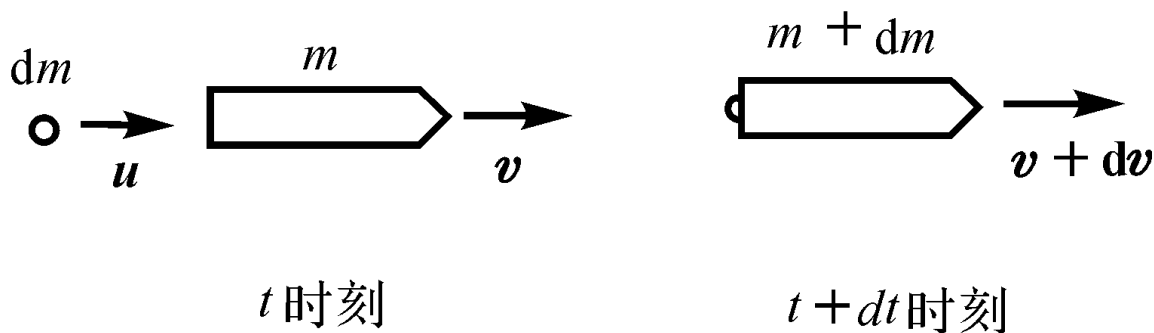
$$\therefore \text{当 } t = 0 \text{ 时, } v_c = 0, \quad x_c = 0$$

$$\therefore x_c = 0$$



2-5 密舍尔斯基方程

主体+流动物=系统



$$\vec{F} \cdot dt = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t)$$

$$\vec{P}(t) = m\vec{v} + dm\vec{u} \quad \vec{P}(t + dt) = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v})$$

$$\vec{F} \cdot dt = dm(\vec{v} - \vec{u}) + m d\vec{v}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} \quad (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt} \text{ 的物理意义:}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{u} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt}$$

几点说明:

1. 系统的确定 (主体, 流动物)

2. $\vec{u}, \vec{v}$ 分别为流动物和主体相对于惯性系的速度, $\vec{v}'$ 为流动物相对于主体的相对速度.

在一维情况下, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'$ 可用+, -号表示方向,

$$m \frac{dv}{dt} = F + (u - v) \frac{dm}{dt}$$

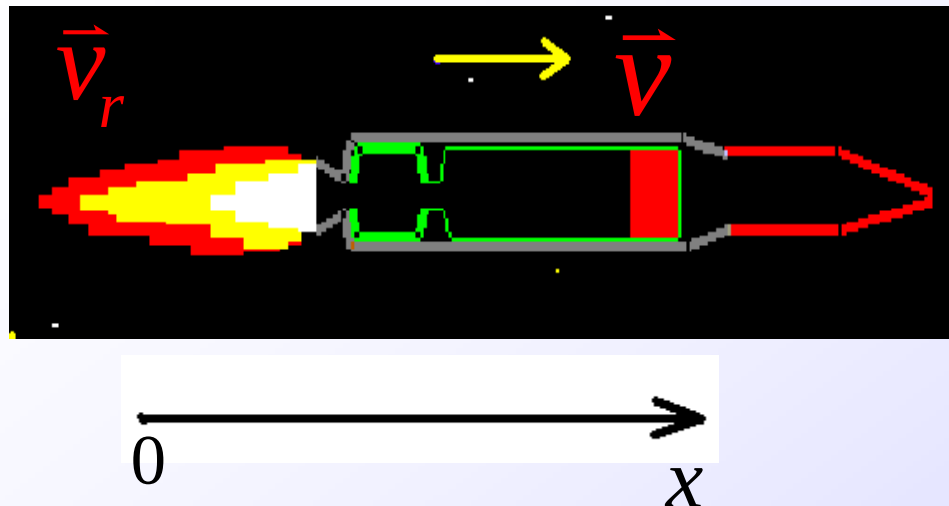
3. 主体质量增加时 $\frac{dm}{dt} > 0$ 反之为 $\frac{dm}{dt} < 0$

一、自由场

$$\vec{F} = 0$$

$$t = 0 \quad v_0 = 0 \quad M_0$$

燃料燃尽时: M_e



$$m \frac{dv}{dt} = -v_r \frac{dm}{dt}$$

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_{M_0}^{M_e} v_r \frac{dm}{m}$$

$$v - v_0 = v_r \ln \frac{M_0}{M_e}$$

讨论：增加火箭速度的方法

①增大 v_r 理论上可达到5000m/s，实际上2500m/s有困难；

②增加 M_0/M_e ，要增加质量比，第一宇宙速度需要49，很困难。

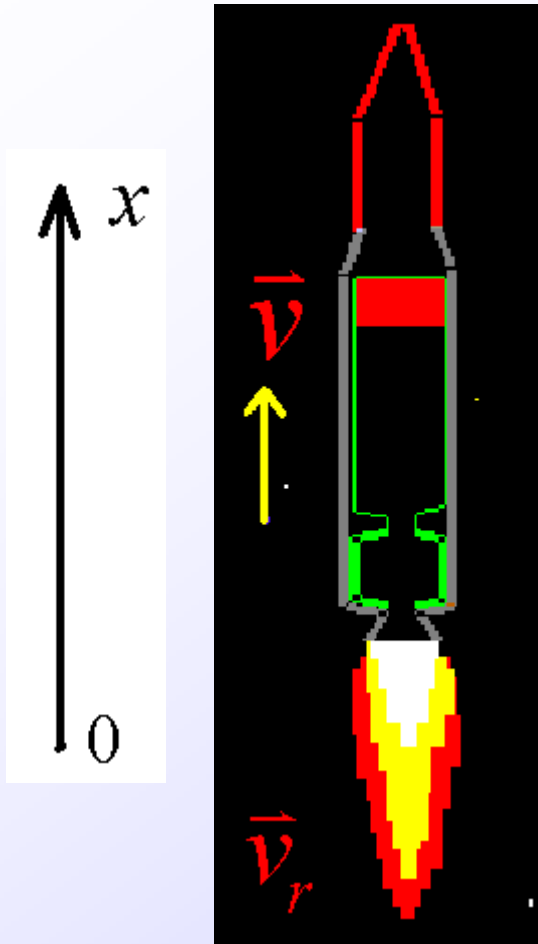
必须采用多级火箭才能真正提高速度！

$$v = v_r \ln \frac{M_0}{M_e}$$

二、重力场

$$t = 0 \quad v_0 = 0 \quad M_0$$

燃料燃尽时: M_e



$$m \frac{dv}{dt} = -mg - v_r \frac{dm}{dt}$$

$$\int_{v_0}^v dv = -\int_0^t g dt - \int_{M_0}^{M_e} v_r \frac{dm}{m}$$

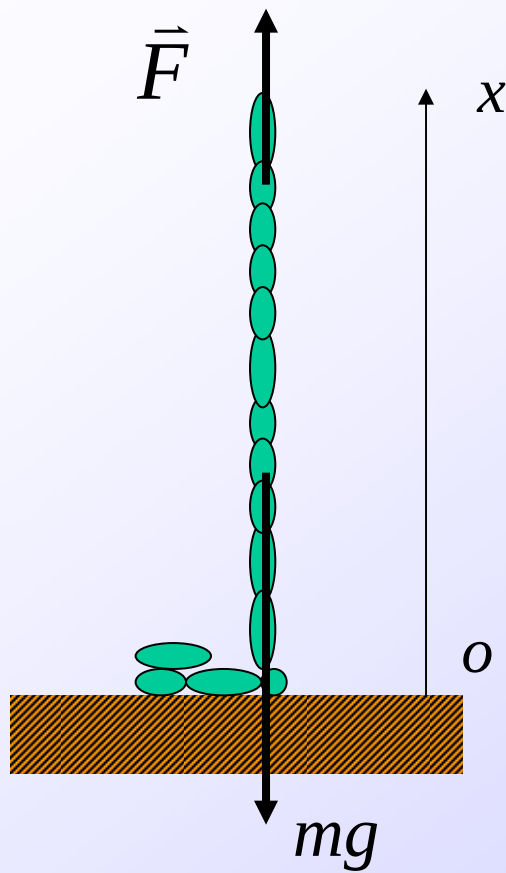
$$v - v_0 = -gt + v_r \ln \frac{M_0}{M_e}$$





Shenzhou IV Spacecraft

例：一质量均匀分布的柔软细绳开始时盘绕在水平桌面上。
 (1) 现以一恒定的加速度 a 竖直向上提绳，当提起的高度为 h 时，作用于绳端的力为多少？
 (2) 若以一恒定的速度 v 竖直向上提绳，当提起的高度仍为 h 时，作用于绳端的力又为多少？



解(1) 取已提起的绳长为主体，当提起的绳长为 x 时，主体质量：

$$m = \lambda x$$

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \sum \bar{F}_i + (\bar{u} - \bar{v}) \frac{dm}{dt}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg - v \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \frac{dm}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda v \quad v = \sqrt{2ax}$$

$$F = 3\lambda xa + \lambda xg$$

$$x = h \quad F = 3\lambda ha + \lambda hg$$

(2) 若以一恒定的速度 v 竖直向上提绳

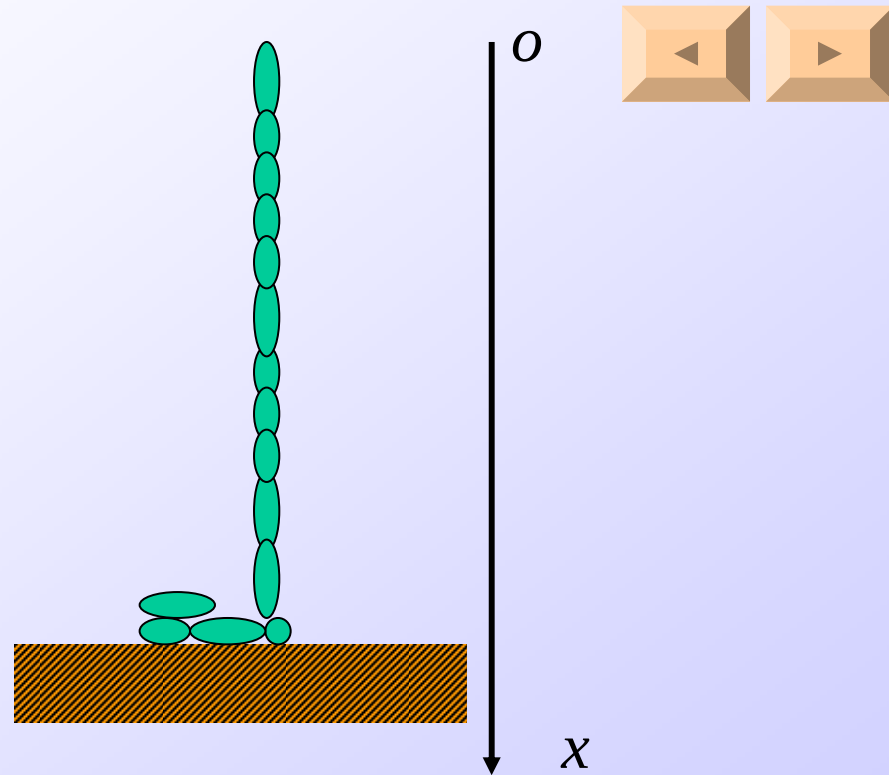
$$m \frac{dv}{dt} = F - mg - v \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \frac{dm}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt} = \lambda v$$

$$F = \lambda v^2 + \lambda xg$$

$$F = \lambda v^2 + \lambda hg$$

例2、一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。



证明：取如图坐标，设 t 时刻已有 x 长的柔绳落至桌面，随后的 dt 时间内将有质量为 ρdx

(Mdx/L)的柔绳以 dx/dt 的速率碰到桌面而停止，它的动量变化率为：

$$\frac{dP}{dt} = \frac{-\rho dx \cdot \frac{dx}{dt}}{dt}$$

根据动量定理，桌面对柔绳的冲力为：

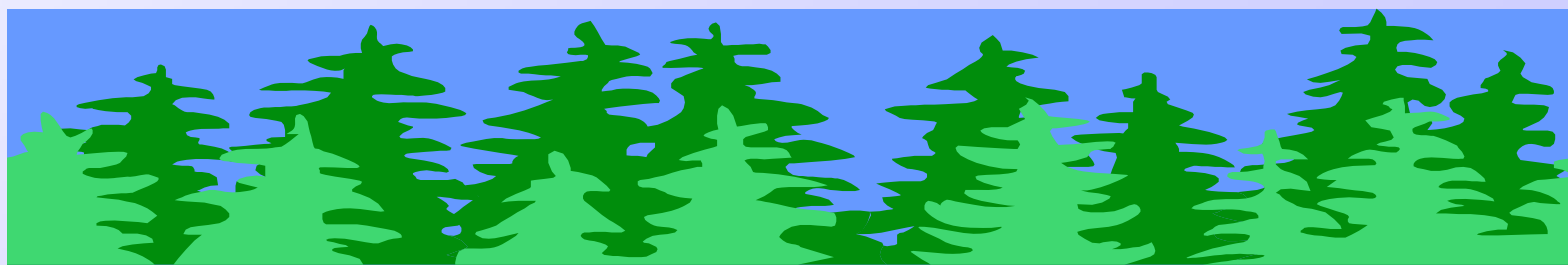
$$F' = \frac{dP}{dt} = \frac{-\rho dx \cdot \frac{dx}{dt}}{dt} = -\rho v^2$$

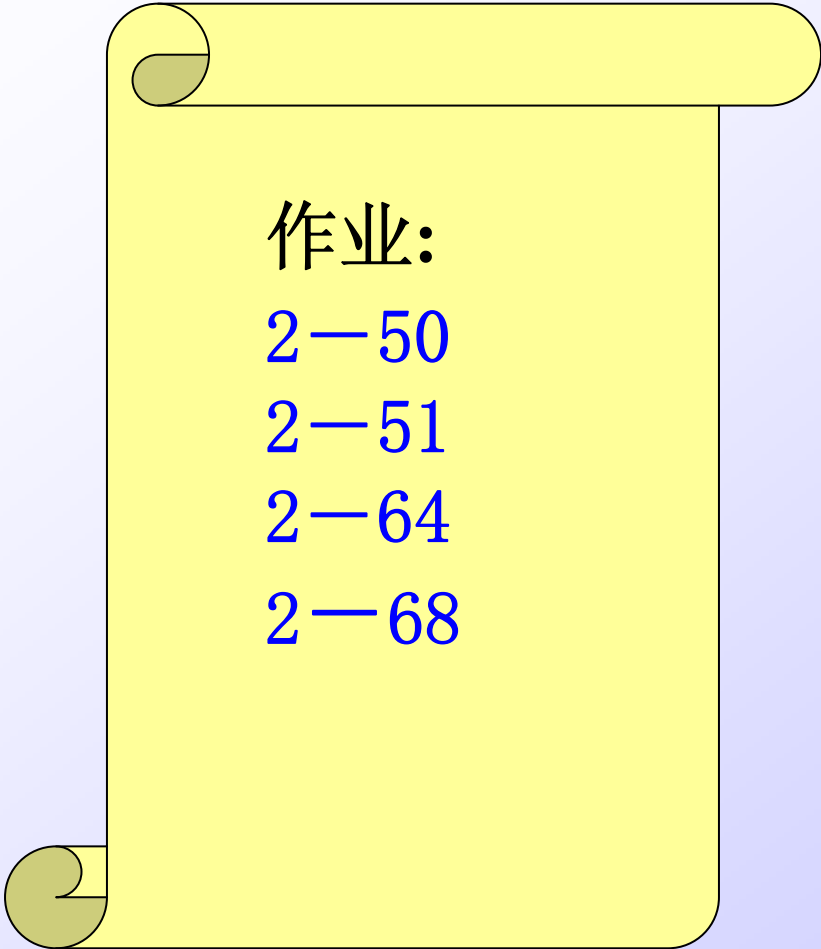
柔绳对桌面的冲力 $F = -F'$ 即：

$$F = \rho v^2 = \frac{M}{L} v^2 \quad \text{而 } v^2 = 2gx \quad \therefore F = 2Mgx / L$$

而已落到桌面上的柔绳的重量为 $mg = Mgx / L$

所以 $F_{\text{总}} = F + mg = 2Mgx / L + Mgx / L = 3mg$





作业:

2—50

2—51

2—64

2—68