

(17)

第29卷 第5期
2000年5月中学物理教学参考
Physics Teaching in Middle SchoolVol. 29 No. 5
May, 2000

●竞赛辅导●

多余的条件

——关于1999年全国物理竞赛复赛最后一道题的讨论

姜水根

(浙江省宁波效实中学 315010)

G634.75

题目 1999年全国物理竞赛复赛最后一道题如图1所示, z 轴竖直向上, xy 平面是一绝缘的、固定的、刚性平面。

在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放一带电量为 $-q$ ($q > 0$) 的小物块, 该物块与一细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 可通过它牵引小物块。现对该系统

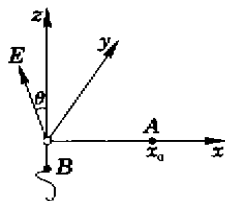


图1

加一匀强电场, 场强方向垂直于 x 轴, 与 z 轴的夹角为 θ 。设小物块和绝缘平面间的摩擦因数 $\mu = \tan \theta$, 且静摩擦因数和动摩擦因数相同, 不计重力作用。现通过细线来牵引小物块, 使之移动。在牵引过程中, 我们约定: 细线的 B 端只准沿 z 轴向下缓慢移动, 不得沿 z 轴向上移动; 小物块的移动非常缓慢, 在任何时刻, 都可近似认为小物块处在力平衡状态。若已知小物块的移动轨迹是一条二次曲线, 试求出此轨迹方程。

竞赛委员会给出了这样的解法, 即

解法1 设所加匀强电场的场强为 E , 它在 y 方向和 z 方向的分量分别为

$$E_y = -E \sin \theta, \quad E_z = E \cos \theta.$$

由于物块带负电, 电场作用于物块的电场力两个分量分别为

$$F_y = -qE_y = qE \sin \theta, \quad (1)$$

$$F_z = -qE_z = -qE \cos \theta. \quad (2)$$

F_y 在 xy 平面内, 方向沿 y 轴正方向, F_z 垂直于 xy 平面, 被绝缘平面的支持力所平衡,

故物块对绝缘平面的正压力的大小 N 和 F_z 的大小相等, 即

$$N = qE \cos \theta,$$

绝缘平面作用于物块的摩擦力为

$$f = \mu N = qE \tan \theta \cos \theta = qE \sin \theta = F_y, \quad (3)$$

f 的方向决定于物块移动的方向。

根据题意, 物块在 xy 平面内的运动可看作是一种在力平衡下的缓慢移动, 作用于物块的三个力 F_y 、 f 和线的拉力 T 都在 xy 平面内。

物块在任一位置达到平衡时的受力情况如图2所示,

φ 为细线与 x 轴的夹角。把 T 沿 x 和 y 方向分解, 得

$$T_x = -T \cos \varphi,$$

$$T_y = -T \sin \varphi,$$

图2

用 f_x 和 f_y 表示 f 的两个分量, 物块平衡时, 有

$$F_y - T \sin \varphi + f_y = 0, \quad (4)$$

$$-T \cos \varphi + f_x = 0. \quad (5)$$

由④、⑤式得

$$(F_y - T \sin \varphi)^2 + T^2 \cos^2 \varphi = f^2.$$

注意到③式, 得

$$T(T - 2F_y \sin \varphi) = 0,$$

$$\text{得 } T = 0 \text{ 或 } T = 2F_y \sin \varphi. \quad (6)$$

因要小物块缓慢移动, 需要细线牵引, $T = 0$ 不符合题意, 应舍去。因 $0 < \varphi < \pi$, $T = 2F_y \sin \varphi > 0$, 将 T 代入④、⑤式, 有

$$f_y = T \sin \varphi - F_y = -F_y \cos 2\varphi,$$

$$f_x = T \cos \varphi = F_y \sin 2\varphi.$$

收稿日期: 2000-03-11

摩擦力方向的斜率

$$k = \frac{f_y}{f_x} = -\operatorname{ctg} 2\varphi \quad (7)$$

k 是摩擦力方向与 x 轴夹角的正切, 即摩擦力方向的斜率, 因摩擦力始终沿轨道的切线方向, 故 k 也就是轨道切线的斜率. 下面, 通过对 (7) 式的分析来寻找轨道方程.

当 $\varphi = 0, k \rightarrow \infty$, 即在起点 A 时, 轨道的切线与 x 轴垂直.

当 $\varphi = \frac{\pi}{2}, k \rightarrow \infty$, 一种情况是小物块运动到 y 轴上后, 沿 y 轴做直线运动到 O 点, 但这与题设轨迹移动是一条二次曲线不符, 因而它一定表示轨道在 O 点的切线与 x 轴垂直.

在二次曲线中, 曲线上两点切线相互平行的只有椭圆, 又因为 A, O 两点的切线与它们的连线相垂直, 这一连线应为曲线的轴线, 且在 Ox 轴上, 另一轴在它的垂直平分线上且与 y 轴平行. 曲线与此轴线的交点的切线的斜率为零. 代入 (7) 式得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 故该曲线为圆, 其方程为

$$(x - \frac{x_0}{2})^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4}.$$

大家可以注意到这个解法得到小物块的移动轨迹是圆, 其关键在于, 利用了试题中给出的一个条件: “小物块的移动轨迹是一条二次曲线”. 实际上这个条件是多余的. 在试题给出的情景中, 小物块的移动轨迹是可求得的.

解法 2 我们对小物块在任意时刻进行受力分析 (如图 3), 由于绳子的拉力 T 在 F_y 和 f 方向的角平分线上, 所以不难证明 $\varphi + \beta = 90^\circ$.

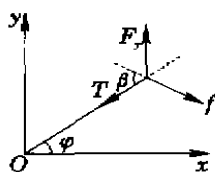


图 3

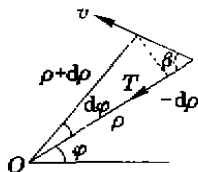


图 4

我们用极坐标来表述小物体的运动轨迹. 那么在任意时刻 (如图 4 所示), 小物体在 (ρ, φ) 时的速度为 v , 经过很短的时间 dt , 小物体在 $(\rho + d\rho, \varphi + d\varphi)$. 显然, 这里的 $d\rho < 0$.

由图 4 可知

$$\frac{(\rho - d\rho)d\varphi}{-d\rho} = \frac{\rho d\varphi}{-d\rho} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$\text{则} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\operatorname{tg} \varphi d\varphi, \quad (8)$$

$$\text{两边积分, 有} \quad \int \frac{d\rho}{\rho} = -\int \operatorname{tg} \varphi d\varphi,$$

$$\text{得} \quad \ln \rho = \ln \cos \varphi + C.$$

由初始条件, 当 $\rho = x_0$ 时, $\varphi = 0$, 可以得积分常数 $C = \ln x_0$, 即 $\ln \rho = \ln \cos \varphi + \ln x_0$, 得到 $\rho = x_0 \cos \varphi$ 这是一个圆的方程, 在直角坐标系中它的方程是

$$(x - \frac{x_0}{2})^2 + y^2 = (\frac{x_0}{2})^2.$$

我猜想, 大学老师首先想到的是这种解法, 由于他们经常用高等数学, 所以他们可能对已经能用高等数学解的物理竞赛题不会再在初等数学范围内多动脑筋. 正像我们中学老师对于小学数学难题习惯于列方程求解而不再去动算术方法的脑筋一样. 既然高等数学超出了中学的要求, 所以就在题目中直接给出“二次曲线”的条件.

但是学生自有学生的办法, 他们可以在初等数学的范围内解出来.

解法 3 在解法 2 中得到的 (8) 式, 在中学数学中的表述是

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\operatorname{tg} \varphi \Delta \varphi.$$

$$\text{因为} \quad \Delta(\cos \varphi) = \cos(\varphi + \Delta \varphi) - \cos \varphi$$

$$= -2\sin(\varphi + \frac{\Delta \varphi}{2})\sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

$$= -\sin \varphi \Delta \varphi,$$

$$\text{所以} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Delta \varphi = -\frac{\Delta(\cos \varphi)}{\cos \varphi},$$

令 $t = \cos \varphi$, 并对上式求和, 设其值为 S , 即

$$\sum \frac{\Delta \rho}{\rho} = \sum \frac{\Delta t}{t} = S,$$

这里 ρ 从 $x_0 \rightarrow \rho$, t 从 $1 \rightarrow \cos \varphi$, 将 S 分成 n 等分, 每部分的 ρ 记为 ρ_i , 这就是 $\frac{\Delta \rho_i}{\rho_i} = \Delta S$, 即

$$\frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_i} = \frac{S}{n},$$

$$\text{得到} \quad \frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = 1 + \frac{S}{n},$$

可得 $\frac{\rho_1}{x_0} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdots \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} =$
 $(1 + \frac{S}{n})^n = \left[\left(1 + \frac{S}{n} \right)^{\frac{n}{S}} \right]^S,$
 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $(1 + \frac{S}{n})^{\frac{n}{S}} = e$, 所以 $\frac{\rho}{x_0} = e^{\frac{S}{x_0}},$

可得 $S = \ln \frac{\rho}{x_0}.$

同样由 $S = \sum \frac{\Delta r}{r}$, 可得 $S = \ln \cos \varphi,$

这样我们也得到了 $\rho = x_0 \cos \varphi$

在这里, 学生用的是微元法, 它实际上就是微积分的思想, 是把微积分的处理低等化. 我们知道, 在运用微元法的学生中, 有一部分学生是掌握了基本的微积分方法的, 但是他们为什么不是干脆用微积分而用微元法呢? 因为他们了解竞赛的大纲, 全国物理竞赛规定, 不要求用微积分进行推导和运算, 他们怕扣分, 正像在小学的竞赛中不能设 x 一样. 这些优秀的学生从小学上来, 经过多次的竞赛, 他们知道, 评分标准的规定以及对这个规定的掌握, 对学生的成绩具有极大的影响. 参赛的学生不仅要想到做出试题, 而且要想到老师的评分, 思想负担太重了. 但是我认为, 他还是超出了大纲, 他在解法中用的自然对数的底数 e , 这不也是高等数学的内容吗? (在实用上, 出现 e 可能是不扣分的, 因为还要鼓励学生增长课外知识呢)

我认为, 试题给出的条件还是应当充分利用的, 如果试题给出这样的条件: “小物块移动的轨迹是圆”, 要你求这个圆的方程, 那就更好办了. 现在既然试题给出了“小物块的移动轨迹是一条二次曲线”的条件, 我们利用这个条件, 还可以找到比解法 1 更好的解法.

解法 4 如图 5 所示, 由于小物块对 xy 平面的压力是 $N = Eq \cos \theta$, 则摩擦力是 $f_1 = \mu N = Eq \sin \theta$, f_1 始终沿切线方向. 而电场力在 xy 平面的分量是 f_2 , 其方向始终不变, 沿着 y 轴的正方向, 其大小为 $f = Eq \sin \theta = f_1$, 小物块还受到绳子的张力作用, 在 xy 平面上 f_1 、

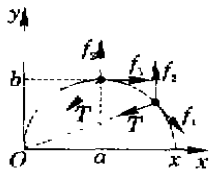


图 5

f_2 、 T 三力平衡, 即 f_1 、 f_2 这两个力的合力与 T 大小相等方向相反, 根据平行四边形定则 (在这里是菱形) 可知, T 的方向平分力 f_1 、 f_2 的夹角.

我们先分析开始时的情况, 小物块在 $(x, 0)$ 处, $T=0$, 小物块开始运动时运动方向与 y 平行, 也就是轨迹的切线与 y 轴平行.

我们再分析小物块在将进入 O 点时的情况, 设小物块在将进入 O 点前的位置为 P , 那么绳子的张力的方向是沿 PO 方向, 对于处在 P 点的小物块来说, O 点是它下一个瞬间的位置, 所以它在 P 到 O 处的平均速度是 PO 方向, 当我们取 P 点离开 O 点无限近时, PO 的平均速度就是小物块在 O 处的瞬时速度, 这就是说, 当质点即将进入 O 点时, 瞬时速度的方向就是绳子的拉力方向, 即摩擦力的方向和绳子拉力的方向共线. 考虑到摩擦力、绳子拉力、电场力的分力这三力平衡, 而电场力的分力方向是平行于 y 轴的, 所以这三力共线, 且平行于 y 轴, 这就是说, 小物块的轨迹的切线与 y 轴平行.

这条曲线有两条切线与 y 轴平行, 那么这条二次曲线不可能是双曲线或抛物线, 所以这条二次曲线就是椭圆或者是圆.

考虑到当 f_1 和 x 轴平行时 (该点在曲线的轴上), f_1 仍与 x 轴垂直, 绳子的拉力 T 在 f_1 、 f_2 的角平分线方向, 应与 x 轴成 45° 角, 而椭圆不满足这个条件 (T 与 x 轴成 $\arctg \frac{b}{a}$ 45° 的角), 所以这条二次曲线必定是圆, 方程是

$$(x - \frac{x_0}{2})^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4}, (x \geq 0)$$

解法 4 和解法 1 这两种方法本质上是相同的, 它们都是利用了题目中给出的条件, 都是利用轨迹上的两个点的切线平行的方法说明 (而不是证明) 了小物体的轨迹是椭圆, 它们都是利用了两轴的端点连线与轴的夹角为 45° 进一步说明了小物体的轨迹是圆. 我们应该看到, 解法 4 比较解法 1 更好, 因为它更多地用到了物理的思考, 它就可以避免了像解法 1 那样复杂的数学运算, 这是物理竞赛题解题中常见的现象.