



巧用密舍尔斯基方程 解变质量问题

◆ 汤学文 张元魁

在奥赛解题中,常遇到求解变质量问题.过去往往采用微元法一步一步求解,因而显得繁琐.若采用密舍尔斯基方程:

$$F = M \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dM}{dt} \text{ 则简便得多.}$$

式中 F 是质量不断变化的主体所受的合外力, u 是附加物附加到主体前的绝对速度或抛出物抛离主体后的绝对速度. 方程证明如下:

如图 1, 设主体在 t 时刻的质量为 $M(t)$, 速度为 $v(t)$, 设在 dt 时间内有质量为 dM 、速度为 u 的附加物加到主体上, 使得在 $(t + dt)$ 时刻主体的质量为 $(M + dM)$, 速度为 $(v + dv)$. 取主体和附加物为物体系, 则 t 时刻, 物体系动量为

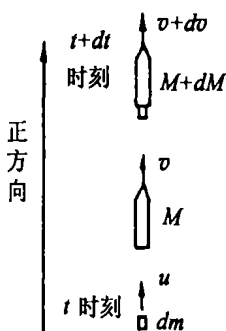


图 1

$$p = Mv + u dM,$$

在 $(t + dt)$ 时刻, 物体系的动量为

$$p + dp = (M + dM)(v + dv).$$

因此, 在 dt 时间物体系动量的增量为

$$\begin{aligned} dp &= (M + dM)(v + dv) - (Mv + u dM) \\ &= Mdv + (v - u)dM + dMdv. \end{aligned}$$

在 dt 时间内, 设主体受外力 F , 附加物受外力 F' , 由动量定理,

$$\begin{aligned} (F + F')dt &= dp \\ &= Mdv + (v - u)dM + dMdv. \end{aligned}$$

在上式中 $F'dt \ll Fdt$, $dMdv$ 为高阶小量, 均可忽略, 故有

$$F = M \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dM}{dt}.$$

下面用密舍尔斯基方程求解二道奥赛训练题.

例 1 一根质量分布均匀的铁链, 质量为 m , 长为 L , 静止在水平面上, 若用一竖直向上的恒力 F 作用于铁链的一端, 则当铁链刚好全

▲ 时, 则原来下面弹簧必拉伸, 上面弹簧亦拉伸, 由牛顿第二定律有

$$F'_2 + mg = ma, F'_2 = m(a - g) = 2m.$$

则当拔出 N 时, $F_{\text{合}} = F'_2 = ma_2$,

$$a_2 = \frac{F'_2}{m} = 2 \text{ m/s}^2 \text{ 方向竖直向上, 故选 B、C.}$$

例 3 甲、乙两物沿同一直线相向运动, 甲物的速度大小是 6 m/s , 乙物的速度大小为 2 m/s , 碰后两物的速度大小为 4 m/s , 求甲、乙的质量之比?

解析 这是考查动量守恒定律应用的题目. 题中的碰后条件不明确, 有两种可能, 要进行全面分析. 以甲碰前的速度为正方向, 则有当碰后沿各自的反方向运动时, 由动量守恒定律有:

$$m_{\text{甲}} v_{\text{甲}} - m_{\text{乙}} v_{\text{乙}} = -m_{\text{甲}} v'_{\text{甲}} + m_{\text{乙}} v'_{\text{乙}},$$

$$\frac{m_{\text{甲}}}{m_{\text{乙}}} = \frac{v'_{\text{甲}} + v_{\text{乙}}}{v_{\text{甲}} + v'_{\text{乙}}} = \frac{3}{5}.$$

当碰后粘在一起沿甲原方向运动时, 则有

$$m_{\text{甲}} v_{\text{甲}} - m_{\text{乙}} v_{\text{乙}} = (m_{\text{甲}} + m_{\text{乙}}) v', \frac{m_{\text{甲}}}{m_{\text{乙}}} = 3.$$

总之, 在解答条件开放题时, 要深入分析题意, 找到将会出现的各种可能情况, 并逐一解答出来, 防止漏解. 通过这样多角度思考, 有利于培养同学们的发散思维, 培养创新能力和全面分析问题的能力.

【作者单位: (541303) 广西兴安县溶江中学】

【作者单位: (541500) 广西全州高中】

部离开地面时,其速度是多大?

解析 如图2所示,设 t 时刻已有长为 y 的铁链离开地面,把它作为主体,

$M(t) = y\lambda$, $\lambda = \frac{m}{L}$ 为线密度,速度为 $v(t)$,主体受合

外力 $F - \lambda yg$,在 dt 时间内有 dM 的链条加入到主体,附加物加入到主体前的速度 $u = 0$. 代入到密舍尔斯基方程中有

$$F - \lambda yg = y\lambda \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt},$$

且 $\frac{dM}{dt} = \lambda \frac{dy}{dt}$, 代入整理得

$$\frac{F}{\lambda} - yg = y \frac{dv}{dt} + v \frac{dy}{dt},$$

$$\left(\frac{F}{\lambda} - yg\right)dt = ydv + vdy = d(yv),$$

两边乘以 yv 得

$$\text{左边} = \frac{F}{\lambda} yvdt - y^2 g vdt = \frac{F}{\lambda} ydy - gy^2 dy,$$

$$\text{右边} = (yv)d(yv)$$

$$\text{两边积分得} \frac{1}{2} y^2 v^2 = \frac{F}{2\lambda} y^2 - \frac{1}{3} gy^3.$$

$$\text{即 } v^2 = \frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} gy, \text{ 所以 } v = \sqrt{\frac{F}{\lambda} - \frac{2}{3} gy}.$$

当铁链刚好全部离地时有 $y = L$, 故得铁链全部离地时的速度

$$v = \sqrt{\frac{FL}{M} - \frac{2}{3} gL}.$$

值得一提的是有的参考资料上,错误地运用动能定理求解:

$$FL - mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} mv^2,$$

$$\text{得 } v = \sqrt{\frac{2FL}{M} - gL}.$$

产生错误的原因是:高中范围内的动能定理的研究对象是质点,而题目所给的是连续的变质量

量问题,质点的动能定理已不再适用.

例2 竖直下垂的绳子从静止自由下落,开始时绳的下端刚好与地面接触,设绳均匀柔软,全长为 l ,试证明:下落过程中地面所受压力等于已经落在地面上的绳子重量的3倍.

解析 如图3,设在某时刻 t ,已有长为 $(l - x)$ 的一段绳子落在地

面上,把它作为主体,其质量为 $M(t) = \lambda(l - x)$, λ 是绳子的线密度,这段绳子的速度

$$v(t) = 0.$$

这段绳子所受合外力

$$F = N - \lambda(l - x)g,$$

其中 N 为地面支持力.

在 dt 时间内有质量为 dM 的绳子(附加物)加入主体,附加物加入到主体前的速度为

$$u = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{2g(l - x)}.$$

由密舍尔斯基方程:

$$M \frac{dv}{dt} = (u - v) \frac{dM}{dt} + F,$$

$$\text{代入有: } 0 = u \frac{dM}{dt} + N - \lambda(L - x)g,$$

故地面支持力

$$\begin{aligned} N &= \lambda(l - x)g - u \frac{dM}{dt} \\ &= \lambda(l - x)g - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d}{dt}[\lambda(l - x)] \\ &= \lambda(l - x)g + \lambda u^2 \\ &= \lambda(l - x)g + 2\lambda(l - x)g \\ &= 3\lambda(l - x)g. \end{aligned}$$

可见地面支持力(其大小等于地面受绳的压力)为已经落在地面上那部分绳子重量的3倍.

由以上2例可以看出:用密舍尔斯基方程有其独到之处,求变质量问题的新方法.

【作者单位:(410300) 湖南省浏阳市一中】

【作者单位:(410300) 湖南省浏阳市教委】

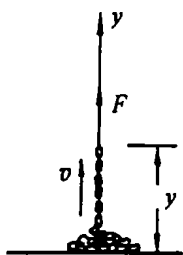


图2

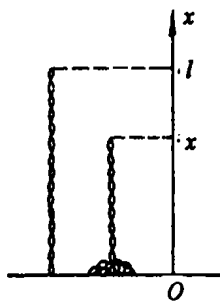


图3